

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**E. A. P. DE FÍSICA**

**Obtención del Hamiltoniano cuántico y clásico de un  
sistema espín-bosón con polarización circular**

Tesis

para optar el título profesional de Licenciado en Física

**AUTOR**

Walter Mario Solano Reynoso

**ASESOR**

Pablo Héctor Rivera Riofano

**Lima – Perú**

**2008**

*A mi madre Arcenia Reynoso Junco y a la memoria de mi padre Víctor Solano Aparco.*

*A la memoria de mi tío Lázaro Solano Aparco y agradecimiento a mi hermana Martha Solano Villanueva, quienes me apoyaron durante los estudios de pregrado en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.*

*Mi agradecimiento al Dr. Pablo Héctor Rivera Riofano por la asesoría de la presente tesis y a la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.*

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Sistema átomo-campo electromagnético</b>	<b>5</b>
2.1. Cuantización del campo electromagnético . . . . .	6
2.2. Interacción átomo-campo electromagnético . . . . .	10
2.3. Aproximación dipolar eléctrica y el hamiltoniano del sistema espín-bosón . . . . .	13
<b>3. Sistema espín-bosón</b>	<b>18</b>
3.1. Expresión del momento lineal en la base de espín $1/2$ . . . . .	19
3.2. Obtención de los hamiltonianos cuánticos para átomos hidrogenoides con polarización circular . . . . .	24
<b>4. Estados coherentes</b>	<b>29</b>
4.1. El límite clásico de la mecánica cuántica . . . . .	30
4.2. Estados coherentes generalizados . . . . .	31
4.3. Estados coherentes de campo . . . . .	33
4.4. Estados coherentes atómicos . . . . .	35

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
4.5. Obtención de los hamiltonianos clásicos con polarización circular del campo electromagnético . . . . .	36
<b>5. Discusión</b>	<b>41</b>
5.1. Hamiltonianos cuánticos . . . . .	41
5.2. Hamiltonianos clásicos . . . . .	43
<b>6. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>46</b>

## **Resumen**

El análisis de la interacción entre la radiación electromagnética y un sistema cuántico compuesto por un gas de átomos hidrogenoides se realiza inicialmente determinando el hamiltoniano de interacción desde una perspectiva cuántica entre un sistema de espines y bosones. Lo novedoso de la determinación realizada aquí es que consideramos la polarización circular para los bosones. El hamiltoniano clásico de la interacción espín-bosón se determina como el valor esperado del hamiltoniano cuántico, donde los vectores de estados están definidos como los estados coherentes del sistema de espines.

# Capítulo 1

## Introducción

La interacción de la radiación electromagnética con sistemas cuánticos (átomos o moléculas) se realizan a través de la absorción y emisión de fotones cuyas energías coinciden con las diferencias de energía entre dos autoestados de energía de los sistemas cuánticos.

Los sistemas cuánticos (átomos o moléculas) conforman el medio donde se propaga la radiación electromagnética de longitudes de onda que dependen del tipo de tratamiento que se quiera hacer. En muchos casos las longitudes de onda de la radiación es mucho mayor que las distancias de separación de los sistemas cuánticos y del tamaño de los mismos. Asimismo, se considera que la longitud de onda de Broglie de los sistemas cuánticos son del orden de sus tamaños. En una primera aproximación al problema podemos considerar que la distancia entre los sistemas cuánticos es tal que los acoplamientos entre los estados de energía de los sistemas cuánticos para un valor dado de energía son casi cero. Esto implica que al considerar el vector de estado total de todos los sistemas cuánticos no obedecen necesariamente al operador de paridad [1]. Esto es una aproximación que ha generado mucha polémica en la literatura, pero simplifica la realización de cálculos que nos permiten tener una primera idea de lo que puede estar ocurriendo en los procesos de interacción radiación-materia. Los modelos sobre láseres de estado sólido incluyen esta primera aproximación, debido a que las densidades de las impurezas que energéticamente se ubican próximos a las bandas de valencia y de conducción son bastante bajas comparadas a los materiales semiconductores que los acogen.

En segunda instancia, al analizar la radiación electromagnética podemos considerar la aproximación clásica, semiclásica o cuántica. Cuando escogemos este último enfoque, la radiación es generada por un conjunto bastante grande de os-

ciladores cuánticos. Y si consideramos que con un modo de la radiación electromagnética sólo interactúan dos autoestados de energía de los sistemas cuánticos, el análisis se sobresimplifica. Para reducir más el problema, en la literatura han considerado que la radiación posee una polarización plana. Los átomos o moléculas tienen diferentes niveles de energía. Cuando interactúa con un solo modo de la radiación electromagnética, lo hace solamente entre dos niveles de energía, absorbiendo o emitiendo el fotón. No existe interacción con los otros niveles de energía. Esto hace que los átomos o moléculas puedan considerarse como sistemas de dos niveles de energía en interacción con un modo del campo electromagnético.

Fue Dicke [1] quien obtuvo el hamiltoniano de interacción de la radiación con sistemas cuánticos ligeramente acoplados con el propósito de explicar la superradiancia de los mismos y que es conocido como *modelo de Dicke*. Poco después, Jaynes y Cummings [2], restringieron, en el modelo de Dicke, los términos que no conservan la energía y obtuvieron el hamiltoniano que ahora es uno de los modelos omnipresentes en óptica cuántica, denominado *modelo de Jaynes-Cummings*. Reiteramos que ambos modelos fueron obtenidos considerando el campo electromagnético con polarización plana.

Para simplificar el análisis, como ya se explicó, se considera que el sistema de partículas, sean átomos o moléculas, constan de solamente dos niveles de energía; aplicando el método reduccionista a su máxima expresión al sistema de dos niveles, se le considera como una cuasipartícula de espín  $1/2$  [1, 3, 4]. Como el campo electromagnético posee un mar de fotones cuya energía está cuantizado y cuyo autovalor de energía es único, los fotones son partículas de espín entero, denominados bosones y obedecen, además, la estadística de Bose-Einstein. Esta imagen sobresimplificada de la interacción átomo-radiación electromagnética ha permitido que en la literatura sea conocida como el sistema espín-bosón.

Para el campo electromagnético con polarización plana, este sistema fue estudiado en diversos contextos, especialmente en óptica cuántica [5]. En nuestro caso, la motivación principal es realizar estudios de caos en el sistema espín-bosón con polarización circular del campo electromagnético, para lo cual se tiene que obtener previamente el hamiltoniano cuántico y clásico de la interacción. En la literatura se encuentran estudios con polarización plana y las primeras publicaciones en esta dirección datan de 1976, con Belobrov *et al* [6], quienes hacen un análisis del comportamiento caótico de los valores medios de los observables cuánticos. Posteriormente Milonni *et al* [7] reportan comportamientos caóticos en relación a óptica cuántica; Graham y Höhnernbach [8], han reportado propiedades caóticas del hamiltoniano realizando estudios cuánticos y también clásicos de los valores medios de los observables cuánticos.

En las décadas 80 y 90 del siglo pasado, grupos brasileños han reportado caos en el *modelo de Dicke* en numerosos trabajos publicados, tanto del hamiltoniano cuántico como clásico [9, 10, 11, 12, 13]. Ellos reportan estudios del hamiltoniano clásico obtenido a través de los valores medios de hamiltonianos cuánticos usando estados coherentes [14].

El concepto de estados coherentes fue presentado por primera vez para los osciladores cuánticos por Schrödinger [15], en 1926. Permaneció sin ser desarrollado hasta el año 1963, cuando Glauber menciona por primera el nombre de estados coherentes [14] para estudiar la correlación de fotones en una fuente incoherente. La generalización de los estados coherentes a otros sistemas, como los espines, fue desarrollada por Perelemov [16], lo cual permitió deducir hamiltonianos clásicos de los correspondientes cuánticos y, en particular, obtener el hamiltoniano clásico correspondiente al *modelo de Dicke*. La ventaja de estos hamiltonianos obtenidos vía estados coherentes es que ellos ya se encuentran expresados en términos del espacio de fase como se hace en la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica.

En el presente trabajo consideramos los sistemas cuánticos como átomos hidrogenoides, de modo que se pueden realizar cálculos explícitos de los parámetros que intervienen en los sistemas; además, la interacción se produce a través de un único modo, una sola frecuencia, del campo electromagnético con polarización circular, lo que significa que la interacción entre el campo electromagnético y los sistemas cuánticos se producen solamente entre sistemas de dos niveles y un modo del campo electromagnético con polarización circular. Por tanto, reduciendo más el problema, la interacción es entre un modo del campo electromagnético con polarización circular y una cuasipartícula de espín ficticio  $1/2$  [1, 3, 4].

El objetivo central del presente trabajo es la obtención del hamiltoniano cuántico y clásico de la interacción de un sistema de partículas independientes de espín  $1/2$  con un modo del campo electromagnético con polarización circular.

Intentando mantener un orden en la presentación de los temas, en el segundo capítulo de este trabajo se presenta la cuantización del campo electromagnético, el cual es un procedimiento estandarizado que se encuentra en textos de óptica cuántica como Walls [17] y Loudon [18], y de mecánica cuántica como Sakurai [19] y Townsend [20], donde se obtiene el hamiltoniano del sistema átomo-radiación para el campo electromagnético linealmente polarizado en la aproximación dipolar. A pesar de ser ahora un tema de textos, se ha visto por conveniente considerar este capítulo, porque la deducción del hamiltoniano del sistema que se considera es uno de los objetivos centrales de este trabajo, puesto que muchos detalles relevantes servirán para el tercer capítulo donde se desarrolla la obtención del hamiltoniano cuántico del sistema átomo-radiación con polarización circular del campo electro-



magnético, especializado para el caso de átomos hidrogenoides, donde es posible obtener los valores de los parámetros de manera analítica, teniendo en cuenta las transiciones relacionadas con la polarización circular, las que tienen que ver justamente con las transiciones  $\Delta m = \pm 1$  para la propagación del campo electromagnético en la dirección del eje  $z$  y, además, las transiciones  $\Delta m = 0$  relacionadas con la polarización lineal.

En el cuarto capítulo se desarrollan ideas básicas de los estados coherentes generalizados, centrandó las definiciones en los estados coherentes del campo electromagnético cuantizado y los estados coherentes atómicos tratados como un sistema de dos niveles de energía y relacionados con los estados de un sistema de espines  $1/2$  independientes, para que a partir de dichos estados se pueda obtener los hamiltonianos clásicos correspondientes a los cuánticos que fueron deducidos en el tercer capítulo. En el quinto capítulo se hace una discusión cualitativa de los resultados obtenidos, tanto de los hamiltonianos cuánticos como clásicos, especialmente en el espíritu del comportamiento caótico, el cual es nuestro interés primario, finalizando con las conclusiones en el sexto capítulo.

## Capítulo 2

# Cuantización del sistema átomo-campo electromagnético

En este capítulo se desarrollará el procedimiento de cuantización del campo electromagnético y la obtención del hamiltoniano cuántico del sistema átomo-campo electromagnético con polarización plana, el cual es conocido y presentado de una u otra manera en textos de óptica cuántica y de mecánica cuántica, considerando la aproximación dipolar.

Una manera formal y rigurosa de obtener el hamiltoniano consiste en demostrar que las ecuaciones básicas del electromagnetismo, las ecuaciones de Maxwell, son las ecuaciones de Lagrange derivadas variacionalmente de una cierta lagrangiana, como explica Cohen-Tannoudji *et al* [21], y que permite obtener la cuantización canónica del sistema por pares, formada por una coordenada generalizada y su momento canónicamente conjugado, que definen los operadores cuyo conmutador es precisamente  $i\hbar$ . Esta formulación tiene ventajas, pues permite identificar las variables que son conjugadas entre sí y obtener directamente el hamiltoniano sin necesidad de postularlo.

Por otro lado, observamos que el campo electromagnético es formalmente equivalente a un conjunto de osciladores armónicos, que nos induce a la idea de cuantizar dichos osciladores de forma semejante al oscilador armónico cuántico, con la ayuda de los operadores de creación y aniquilación introducidos a partir de las variables canónicamente conjugadas del oscilador armónico clásico [4]. Se usa esta idea simple, a pesar de que desde el inicio no queda claro cuáles serían las variables dinámicas conjugadas. Esta metodología es un patrón en la mayoría de los textos de mecánica cuántica y óptica cuántica.

Consideramos que el campo electromagnético interactúa con un solo átomo y, una vez obtenido el hamiltoniano se generalizará a más átomos independientes, es decir, átomos que no interactúan entre sí. Suponemos que la interacción entre el campo electromagnético y el átomo está relacionada con una sola frecuencia del campo, las transiciones que se producen en el átomo por interacción con el campo es solamente entre dos niveles de energía fijos del átomo, razón por el cual se considera al átomo como un sistema de dos niveles de energía, que puede ser simulado como una quasipartícula de espín ficticio  $1/2$ , explicadas en las referencias [1, 3, 4]. Posteriormente este artificio es importante cuando se obtenga los estados coherentes relacionados a los átomos.

## 2.1. Cuantización del campo electromagnético

En el vacío no tenemos cargas ni corrientes eléctricas, de modo que las ecuaciones de Maxwell en unidades del Sistema Internacional pueden escribirse como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , son los campos eléctrico y magnético, respectivamente.

En general, se demuestra [21, 22] que los campos eléctricos y magnéticos se pueden escribir introduciendo un potencial escalar,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , y otro vectorial,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , tales que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.5)$$

y

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad . \quad (2.6)$$

Todos los campos electromagnéticos pueden describirse en términos de potenciales escalares y vectoriales. Sin embargo, cuando  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  son conocidos, los potenciales  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  no están determinados de manera única. Se puede verificar que si tenemos un conjunto de valores posibles de  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , se puede obtener otro conjunto de potenciales  $\varphi'(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)$ , los cuales describen el mismo campo electromagnético por la transformación

$$\varphi'(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

y

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \chi(\mathbf{r}, t) \quad , \quad (2.8)$$

donde  $\chi(\mathbf{r}, t)$  es una función arbitraria de  $\mathbf{r}$  y  $t$ . Cuando se elige el conjunto particular de potenciales, se dice que se eligió un gauge y, como se ve, hay infinitas posibilidades de hacerlo para el mismo campo electromagnético. En particular, cuando no es necesario un tratamiento relativístico y no es necesario satisfacer la invariancia relativística, se acostumbra elegir el potencial vectorial de modo que satisfaga la condición

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad , \quad (2.9)$$

denominado el gauge de Coulomb. Así, los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  se pueden escribir como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.10)$$

y

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad (2.11)$$

respectivamente. Reemplazando en las ecuaciones de Maxwell se encuentra la ecuación ondulatoria para el potencial vectorial descrito como

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (2.12)$$

Para resolver esta ecuación en el espacio se impone una condición de frontera, denominado condiciones periódicas de Born-von Karman muy utilizado en física del estado sólido, que consiste en considerar el espacio vacío como una red de cubos hipotéticos de arista  $L$  tal que el campo electromagnético se repetirá por cada cubo, dándonos para el potencial vectorial  $\mathbf{A}$ , cierta periodicidad, motivo por el cual el potencial vectorial puede expandirse en series de Fourier tridimensional, de modo que la solución de la Ec. (2.12) puede escribirse como

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}s} [q_{\mathbf{k}}(t)\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + q_{\mathbf{k}}^*(t)\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}^*e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] = \mathbf{A}^* \quad , \quad (2.13)$$

y que por las condiciones de frontera, el vector de onda  $\mathbf{k}$  debe satisfacer

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi n_x}{L}\hat{\mathbf{x}} + \frac{2\pi n_y}{L}\hat{\mathbf{y}} + \frac{2\pi n_z}{L}\hat{\mathbf{z}} \quad , \quad (2.14)$$

siendo  $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Los  $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}$  son vectores unitarios de polarización para el modo  $\mathbf{k}$  y  $s$  enumera las dos polarizaciones independientes. Esto se deduce de la condición del gauge de Coulomb que es satisfecha si

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}}^* = 0 \quad , \quad (2.15)$$

que físicamente significa que  $\mathbf{A}$  es puramente transversal y existen dos direcciones independientes para cada  $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}}$ , esto es,

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s'}^* = \delta_{ss'} \quad , \quad (2.16)$$

observando que si  $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}$  es complejo, representa la polarización elíptica general.

Teniendo en cuenta la expresión del potencial vectorial descrito por la Ec.(2.13), y reemplazado en la ecuación de onda dado por la Ec.(2.12), se llega a establecer para cada  $\mathbf{k}$  el conjunto de ecuaciones dado por

$$\ddot{q}_{\mathbf{k}}(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad , \quad (2.17)$$

donde

$$\omega_{\mathbf{k}} = kc \quad . \quad (2.18)$$

Observamos que la ecuación Ec.(2.17) representa un conjunto de ecuaciones del oscilador armónico.

Siguiendo el procedimiento de cuantización el oscilador armónico, simplemente identificamos las coordenadas y momentos canónicamente conjugados y los definimos como

$$Q_{\mathbf{k}} = \sqrt{\epsilon_0 V} (q_{\mathbf{k}} + q_{\mathbf{k}}^*) \quad (2.19)$$

y

$$P_{\mathbf{k}} = -i\sqrt{\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}^2} (q_{\mathbf{k}} - q_{\mathbf{k}}^*), \quad (2.20)$$

respectivamente; donde  $V = L^3$  es el volumen de la región considerada.

En seguida, relacionamos  $Q_{\mathbf{k}}$  y  $P_{\mathbf{k}}$  con sus correspondientes observables cuánticos (operadores), los cuales se denotarán con la misma letra, satisfaciendo las siguientes relaciones de conmutación canónicas

$$[Q_{\mathbf{k}}, Q_{\mathbf{k}'}] = [P_{\mathbf{k}}, P_{\mathbf{k}'}] = 0 \quad \text{y} \quad [Q_{\mathbf{k}}, P_{\mathbf{k}'}] = i\hbar \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad . \quad (2.21)$$

El procedimiento de cuantización del oscilador armónico define los operadores de aniquilación y creación como

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} - iP_{\mathbf{k}}) \quad (2.22)$$

y

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} + iP_{\mathbf{k}}) \quad , \quad (2.23)$$

respectivamente. Y obedecen las siguientes relaciones de conmutación dadas por

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad \text{y} \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad . \quad (2.24)$$

Con estos resultados, escribimos los campos  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , como funciones de los operadores cuánticos, sustituyendo los  $q_{\mathbf{k}}(t)$  en términos de  $a_{\mathbf{k}}$  y  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ ,

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}, s} \left( \frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \left[ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}^* a_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] \quad , \quad (2.25)$$

$$\mathbf{E} = i \sum_{\mathbf{k},s} \left( \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \left[ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}^* a_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \quad , \quad (2.26)$$

$$\mathbf{B} = i \sum_{\mathbf{k},s} \left( \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \left[ (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}) a_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}^*) a_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \quad , \quad (2.27)$$

donde  $s$  indica las dos polarizaciones independientes del campo electromagnético ( $s = 1, 2$ ).

Como la energía del campo electromagnético, clásicamente está dada por

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{E}^2 + c\mathbf{B}^2] \quad , \quad (2.28)$$

se puede obtener el hamiltoniano cuántico del campo electromagnético en el vacío reemplazando las expresiones cuantizadas de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , dadas por (2.26) y (2.27), en (2.28), obteniendo

$$H_R = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left( a_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s}^\dagger + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad (2.29)$$

donde  $H_R$  indica al hamiltoniano cuántico del campo electromagnético de radiación en el vacío.

## 2.2. Interacción átomo-campo electromagnético

Ahora se introduce un átomo en el campo de radiación electromagnética, de modo que existe una interacción entre el átomo y el campo. La energía de interacción es determinado por hamiltoniano descrito por

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + \sum_{\mathbf{k},s} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left( a_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s}^\dagger + \frac{1}{2} \right) + V_{\text{Coul}} \quad , \quad (2.30)$$

donde  $V_{\text{Coul}}$  es la energía potencial del electrón ligado al átomo. El primer término tiene que ver con la energía cinética del electrón y su interacción con el campo electromagnético, el cual se escribe en términos del potencial vectorial. El segundo

término es la energía del campo. Desarrollando el primer término se llega a expresar el hamiltoniano Ec.(2.30) en la forma

$$H = H_A + H_R + H_I \quad , \quad (2.31)$$

donde

$$H_A = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V_{\text{Coul}} \quad (2.32)$$

es el hamiltoniano del átomo, el campo electromagnético está representado por  $H_R$ , Ec. (2.29), y

$$H_I = \frac{e}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{e}{2m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2 \quad (2.33)$$

viene a ser justamente la interacción entre el electrón ligado al átomo y el campo electromagnético. Utilizando el hecho de que en el gauge de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , se demuestra fácilmente [23] que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ , con lo cual la Ec. (2.33) se puede escribir como

$$H_I = \frac{e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2 \quad . \quad (2.34)$$

El modelo espín-bosón considera la partícula (el átomo) como un sistema de dos niveles con autoestados  $|E_1\rangle$ ,  $|E_2\rangle$  y autoenergías  $E_1$ ,  $E_2$ , respectivamente. Ambos obedecen a la ecuación de autovalores dados por

$$H_A |E_1\rangle = E_1 |E_1\rangle \quad \text{y} \quad H_A |E_2\rangle = E_2 |E_2\rangle \quad , \quad (2.35)$$

y los autoestados del sistema de dos niveles forman un conjunto completo formando el operador identidad

$$I = |E_1\rangle\langle E_1| + |E_2\rangle\langle E_2| = \sum_{i=1}^2 |E_i\rangle\langle E_i| \quad . \quad (2.36)$$

Luego reescribimos la Ec.(2.32) como

$$H_A = I H_A I = \sum_{i=1}^2 |E_i\rangle\langle E_i| H_A \sum_{j=1}^2 |E_j\rangle\langle E_j| = \sum_{i=1}^2 E_i |E_i\rangle\langle E_i| \quad (2.37)$$



expresión conocida como segunda cuantización del hamiltoniano.

En el caso de sistemas de dos niveles de energía, existe una correspondencia una a una entre los operadores proyectores  $|E_1\rangle\langle E_1|$ ,  $|E_2\rangle\langle E_2|$ ,  $|E_1\rangle\langle E_2|$  y  $|E_2\rangle\langle E_1|$  y los operadores proyectores de espín  $1/2$  [1, 3, 4] denotados por  $|-\rangle\langle -|$ ,  $|+\rangle\langle +|$ ,  $|-\rangle\langle +|$  y  $|+\rangle\langle -|$ , respectivamente, tales que

$$\begin{aligned} S_+ &\rightarrow |E_2\rangle\langle E_1| \\ S_- &\rightarrow -|E_1\rangle\langle E_2| \\ S_z &\rightarrow \frac{1}{2}(|E_2\rangle\langle E_2| - |E_1\rangle\langle E_1|) \end{aligned} \quad (2.38)$$

con  $E_2 > E_1$ . Si los niveles de energía  $E_1$  y  $E_2$  son desplazados en  $\frac{1}{2}(E_2 + E_1)$ , vamos a tener las nuevas energías como  $E_1 - \frac{1}{2}(E_2 + E_1) = -\frac{1}{2}(E_2 - E_1)$  y  $E_2 - \frac{1}{2}(E_2 + E_1) = \frac{1}{2}(E_2 - E_1)$ .

Y como las transiciones entre dos niveles proporcionan frecuencias bien definidas descritas como

$$\hbar\omega_{21} = E_2 - E_1 = \hbar\omega_0 \quad , \quad (2.39)$$

podemos reescribir la Ec.(2.37) como

$$H_A = \frac{\hbar\omega_0}{2}|E_2\rangle\langle E_2| - \frac{\hbar\omega_0}{2}|E_1\rangle\langle E_1| = \omega_0 \frac{\hbar}{2}(|E_2\rangle\langle E_2| - |E_1\rangle\langle E_1|) \quad , \quad (2.40)$$

obteniéndose, con el uso de las Ecs.(2.40) y (2.38), la expresión simple del hamiltoniano atómico

$$H_A = \omega_0 S_z = \hbar\omega_0 \sigma_z \quad , \quad (2.41)$$

donde  $\sigma_z$  es la matriz de Pauli, cuando el hamiltoniano se representa matricialmente en la base de  $S_z$ .

En el hamiltoniano de interacción, Ec.(2.34), normalmente se desprecia el término  $\frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2m}$ , que es del orden de  $e^2$  en comparación con el primero, a menos que se trabaje con campos muy intensos, de modo que resulta

$$H_I = +\frac{e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \quad . \quad (2.42)$$

Así, insertando el operador identidad, Ec.(2.36), a derecha e izquierda del hamiltoniano de interacción, Ec.(2.42) y usando la expresión cuántica, Ec.(2.25), del potencial vectorial, se obtiene

$$\begin{aligned}
H_I &= \frac{e}{m} \sum_{i,j} |E_i\rangle \langle E_i| \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} |E_j\rangle \langle E_j| \\
&= \frac{e}{m} \sum_{i,j} \sum_{\mathbf{k},s} \left( \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} [ |E_i\rangle \langle E_i| \mathbf{p} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} |E_j\rangle \langle E_j| \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s} \\
&\quad + |E_i\rangle \langle E_i| \mathbf{p} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} |E_j\rangle \langle E_j| \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}^* a_{\mathbf{k}s}^\dagger ] .
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Este es un resultado muy importante de la interacción átomo y campo electromagnético, donde todavía no se ha hecho referencia al tipo de polarización del campo electromagnético.

### 2.3. Aproximación dipolar eléctrica y el hamiltoniano del sistema espín-bosón

Para realizar cálculos explícitos de las expresiones de la forma

$$\langle E_i | \mathbf{p} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | E_j \rangle , \tag{2.44}$$

dadas en la Ec.(2.43), hay que tener en cuenta que  $|E_i\rangle$  y  $|E_j\rangle$  son los autoestados atómicos entre los cuales interactúa la radiación electromagnética. Si se trata de radiación en el rango óptico visible, que es el interés en óptica cuántica, la longitud de onda va de 4000 a 7000 Å ( $1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$ ) y como  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ , siendo  $|\mathbf{r}|$  del orden de las dimensiones atómicas con valores en torno del radio de Bohr,  $a_0 \cong 0.529\text{ Å}$ , resulta que  $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}| \sim 10^{-4}$ . Por otro lado, si hacemos la expansión de la exponencial

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 1 + (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \frac{(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})^2}{2!} + \dots, \tag{2.45}$$

el valor absoluto del segundo término es muy pequeño comparado con 1, que permite una buena aproximación  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \approx 1$ , con lo que

$$\langle E_i | \mathbf{p} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | E_j \rangle \approx \langle E_i | \mathbf{p} | E_j \rangle . \tag{2.46}$$

Así, puesto que si consideramos campos electromagnéticos de longitudes de onda muy grandes en relación al tamaño atómico, los elementos de matriz se pueden aproximar como

$$\langle E_i | \mathbf{p} e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | E_j \rangle \cong \langle E_i | \mathbf{p} | E_j \rangle . \tag{2.47}$$

Estos elementos de matriz se evalúan fácilmente relacionándolos con los operadores de posición  $\mathbf{R}$ , del modo realizado por Sakurai[19], p.338, para la componente  $x$  del operador de posición e inferiendo que

$$\langle E_i | \mathbf{p} | E_j \rangle = im\omega_{ij} \langle E_i | \mathbf{R} | E_j \rangle . \quad (2.48)$$

Por otro lado, los elementos

$$D_{ij} = e \langle E_i | \mathbf{R} | E_j \rangle \quad (2.49)$$

son justamente los elementos de matriz del momento dipolar eléctrico  $\mathbf{D}$  entre los autoestados  $|E_i\rangle$  y  $|E_j\rangle$  y como la energía de transición entre estos dos autoestados es

$$\hbar\omega_{ij} = E_i - E_j , \quad (2.50)$$

la aproximación dada por la Ec.(2.47) es dipolar eléctrica.

Ahora, la interacción del átomo con la radiación del campo electromagnético se realiza a través de un único modo del campo electromagnético, es decir, un solo valor de  $\mathbf{k}$  con vector unitario de polarización plana  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}$ , el cual denotamos como  $\hat{\mathbf{e}}_s$ , siendo este real. Usando el hecho de que  $\mathbf{p}$  es un operador impar, los elementos de matriz diagonales dados por (2.48) o (2.49) son iguales a cero (ver referencias [4, 19]). También debemos tener que  $\langle E_1 | \mathbf{p} | E_2 \rangle = \langle E_2 | \mathbf{p} | E_1 \rangle^*$  por ser  $\mathbf{p}$  hermitiano. Y si  $\langle E_1 | \mathbf{p} | E_2 \rangle$  es real, entonces  $\langle E_1 | \mathbf{p} | E_2 \rangle = \langle E_2 | \mathbf{p} | E_1 \rangle$ . De este modo, en (2.43) se tiene

$$\begin{aligned} H_I = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}} & \left[ |E_1\rangle \langle E_1 | \mathbf{p} | E_2 \rangle \langle E_2 | a + |E_2\rangle \langle E_2 | \mathbf{p} | E_1 \rangle \langle E_1 | a \right. \\ & \left. + |E_1\rangle \langle E_1 | \mathbf{p} | E_2 \rangle \langle E_2 | a^\dagger + |E_2\rangle \langle E_2 | \mathbf{p} | E_1 \rangle \langle E_1 | a^\dagger \right] \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Usando las Ecs.(2.38), las que relacionan los autoestados de un sistema de dos niveles de energía y los de un sistema de espín 1/2, en la Ec.(2.51), se obtiene la expresión simplificada

$$H_I = g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger + \sigma_- a + \sigma_+ a^\dagger) , \quad (2.52)$$

donde

$$g = \frac{e}{\hbar m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}} \langle E_1 | \mathbf{p} | E_2 \rangle \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (2.53)$$

donde el vector unitario real  $\hat{\mathbf{e}}_1$  representa la polarización plana.

En la Ec. (2.52) se separan los términos que conservan y no conservan energía. Por ejemplo, considerando el primer término de (2.52),  $\sigma_+ a$ , de acuerdo a la Ec. (2.38), el operador  $\sigma_+$  lleva del estado  $|E_1\rangle$  al estado  $|E_2\rangle$ , absorbiendo un fotón, es decir, eliminando un fotón, lo cual es compatible con la acción del operador de aniquilación  $a$ , que elimina un fotón. En cambio, el último término de la Ec. (2.52),  $\sigma_+ a^\dagger$ , significa aniquilar un fotón aún cuando  $a^\dagger$  crea un fotón, violando la conservación de energía. Estos procesos se ilustran en las figuras 2.1 y 2.2. De esta manera, separamos la Ec. (2.52) en una parte donde se conserva la energía y la otra donde se viola la conservación de energía,

$$H_I = g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) + g(\sigma_- a + \sigma_+ a^\dagger) . \quad (2.54)$$

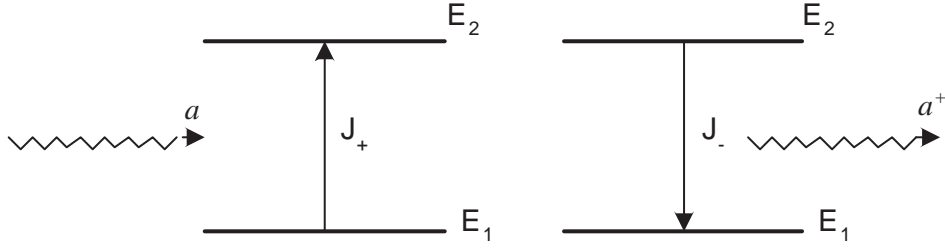
El segundo término de esta última ecuación es la parte que no conserva la energía. En los tratamientos comunes, este término es despreciado porque generalmente es más pequeño que el primero. Este proceso se conoce como la **aproximación de onda rotante**. Del punto de vista de la física del problema, se considera un único modo del campo electromagnético que interactúa con sólo dos niveles de energía del átomo; es decir, el sistema es el campo electromagnético en interacción con un sistema de partículas de dos niveles de energía. Se vio que un sistema de dos niveles puede ser tratado como si fuese una cuasipartícula de espín 1/2. Si la interacción de la radiación electromagnética es con  $N$  átomos que no interactúan entre sí, el autovalor del espín total de las  $N$  cuasipartículas con espines paralelos es  $N/2$ , de esto se deduce que los operadores de espines totales son definidos como

$$J_z = \sum_{i=1}^N \sigma_z^{(i)} , J_+ = \sum_{i=1}^N \sigma_+^{(i)} , J_- = \sum_{i=1}^N \sigma_-^{(i)} . \quad (2.55)$$

De este modo, para escribir el hamiltoniano completo se utiliza la Ec.(2.31) para un único modo, junto con los resultados dados por las ecuaciones (2.41), (2.54) y (2.55), obtenemos

$$H = \hbar\omega_{\mathbf{k}} a^\dagger a + \omega_0 J_z + \frac{G}{\sqrt{N}} (a J_+ + a^\dagger J_-) + \frac{G'}{\sqrt{N}} (a^\dagger J_+ + a J_-) , \quad (2.56)$$

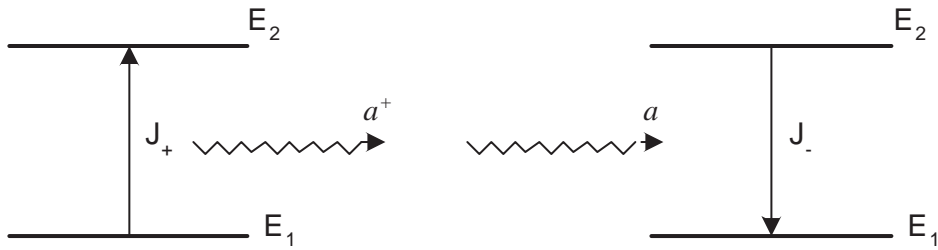
donde las constantes  $G$  y  $G'$  están relacionadas con los parámetros del sistema, habiéndose colocado  $G'$  para separar el término que no conserva la energía.



**Figura 2.1:** Procesos donde se conserva energía,  $aJ_+ + a^\dagger J_-$ .

En la Fig. 2.1 se esquematiza claramente los procesos donde la energía se conserva. El término  $aJ_+$  representa la absorción de un fotón (aniquilación por  $a$ ) y el átomo pasa del autoestado fundamental ( $|E_1\rangle$ ) al excitado ( $|E_2\rangle$ ), que coincide con la acción de  $J_+$ . Similarmente,  $a^\dagger J_-$  representa la creación de un fotón, donde el átomo emite el fotón pasando del estado excitado  $|E_2\rangle$  al fundamental  $|E_1\rangle$ , lo cual representa la acción del operador  $J_-$ .

Por otro lado, en la Fig. 2.2 se observa la creación de un fotón mediante  $a^\dagger$ , asimismo, el átomo absorbe energía pasando del autoestado fundamental  $|E_1\rangle$  al excitado  $|E_2\rangle$ , dado por  $J_+$ . También se observa la aniquilación de un fotón mediante  $a$  y simultáneamente se produce una emisión desde el autoestado  $|E_2\rangle$  al  $|E_1\rangle$  generado por  $J_-$ . Claramente estos dos procesos no son conservativos de la energía.



**Figura 2.2:** Procesos donde no se conserva energía:  $a^\dagger J_+ + aJ_-$ .

Utilizando los estados coherentes generalizados, detalle que analizamos en el Capítulo 4 de este trabajo, se llega a establecer el hamiltoniano clásico que corres-

ponde a la Ec. (2.56), tal como en la referencia [12], dada como

$$\begin{aligned}
 H_{\text{cl}} = & -\hbar\omega_0 J + \hbar\frac{\omega_0}{2} (q_1^2 + p_1^2) + \hbar\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} (q_2^2 + p_2^2) \\
 & + \frac{\sqrt{4J - (p_1^2 + q_1^2)}}{\sqrt{4J}} [g_+ p_1 p_2 + g_- q_1 q_2].
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

En las dos últimas décadas del siglo XX, las dos últimas ecuaciones son los elementos básicos utilizados en diferentes estudios relacionados con caos clásico y cuántico, especialmente por grupos brasileños[12, 13]. El carácter caótico del hamiltoniano está condicionado por el término no conservativo de energía, el término  $G'$  de la Ec. (2.56) y (2.57), que dificulta la obtención de los niveles de energía. Generalmente en óptica cuántica se desprecia dicho término, denominándose aproximación de onda rotante en analogía a la aproximación que se hace en resonancia magnética.

## Capítulo 3

# Hamiltoniano cuántico del sistema espín-bosón con polarización circular

En el capítulo anterior desarrollamos el procedimiento de obtención del hamiltoniano cuántico para transiciones  $\Delta m = \pm 1$  y  $\Delta m = 0$ . Cuando el campo de radiación electromagnética tiene polarización circular propagándose en la dirección del eje  $z$ , el vector de polarización circular estará en el plano  $xy$ . La polarización tiene dos vectores de polarización circular linealmente independientes, una denominada de derecha (positiva) y otra de izquierda (negativa).

No existe uniformidad en cuanto a la convención que se adopta para los dos sentidos de polarización; sin embargo, en este trabajo adoptaremos los más usados en la literatura como en los textos de Townsend [20] y Cohen-Tannoudji *et al* [4], donde los vectores unitarios de polarización circular están definidos como

$$\hat{\mathbf{e}}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y) \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{e}}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y) . \quad (3.1)$$

La polarización derecha  $\hat{\mathbf{e}}_+$  significa que si observamos la propagación desde el eje  $z$  con el campo acercándonos hacia nosotros, entonces vemos que el campo gira en el sentido antihorario. Lo contrario ocurrirá con la polarización izquierda. Hay que advertir que las dos polarizaciones circulares dadas por (3.1) están escritas en términos de polarizaciones planas en las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$ , denotados por los vectores unitarios  $\hat{\mathbf{e}}_x$  y  $\hat{\mathbf{e}}_y$ , respectivamente.

### 3.1. Expresión del momento lineal en la base de espín 1/2

Para simplificar la deducción de las ecuaciones, se han adaptado las expresiones encontradas por Crisp [24], determinando en primer lugar, el operador de momentum lineal que induce, en átomos hidrogenoides, transiciones con polarización circular derecha cuando  $\Delta m = m_f - m_i = +1$ , y transiciones con polarización circular izquierda cuando  $\Delta m = m_f - m_i = -1$ , donde  $m_i$  es el número cuántico correspondiente al autoestado inicial y  $m_f$  al final.

Puesto que estamos considerando el átomo como un sistema de dos niveles de energía, el operador de momento posee sus propios autoestados de momento y sus propios autovalores de momento. Como el punto de partida fueron el hamiltoniano, sus autoestados  $\{|E_1\rangle, |E_2\rangle\}$  y sus autovalores  $\{E_1, E_2\}$  dados por la Ec. (2.35), y se representan mediante una matriz  $2 \times 2$ . Al deducir el hamiltoniano de interacción entre el campo electromagnético y el sistema de dos niveles, encontramos la matriz que involucra al operador de momento con los autoestados de energía, asimismo encontramos una relación en que la matriz está formada por el operador de posición y los autoestados de energía como se muestra en la Ec. (2.48)

$$\langle E_f | \mathbf{p} | E_i \rangle = im\omega_{fi} \langle E_f | \mathbf{R} | E_i \rangle , \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{R}$  es el operador de posición, cuyas componentes representadas en coordenadas cartesianas se escribe como

$$\mathbf{R} = X\hat{\mathbf{e}}_x + Y\hat{\mathbf{e}}_y + Z\hat{\mathbf{e}}_z , \quad (3.3)$$

y la frecuencia angular de transición entre los dos niveles es

$$\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar} . \quad (3.4)$$

Los espectros de autovalores de los operadores de momento y de posición son continuos mientras que el espectro de autovalores del hamiltoniano son discretos, por tanto, la proyección de los autoestados de energía sobre los autoestados de posición y momento son las funciones de onda dependientes de posición y momento, respectivamente. Luego al encontrar los elementos de matriz del operador de momento y de posición actuando sobre sus propios autoestados, sobre estos deben ser proyectados los autoestados de energía.



Los autoestados de energía de sistemas atómicos hidrogenoides proyectados en la representación de los autoestados del operador de posición  $\{|\mathbf{r}\rangle\}$  están dados como

$$\langle \mathbf{r} | E_i \rangle = \Psi_{n_i, l_i, m_i}(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{r} | E_f \rangle = \Psi_{n_f, l_f, m_f}(\mathbf{r}) . \quad (3.5)$$

El operador identidad en la representación  $|\mathbf{r}\rangle$  se escribe como

$$I = \int d^3\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| , \quad (3.6)$$

donde, por definición,  $|\mathbf{r}\rangle = |x, y, z\rangle$  son los autoestados de los operadores hermitianos  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , componentes cartesianos del operador de posición  $\mathbf{R}$  que obedecen las condiciones de autovalores dados por

$$X|\mathbf{r}\rangle = x|\mathbf{r}\rangle , \quad (3.7)$$

$$Y|\mathbf{r}\rangle = y|\mathbf{r}\rangle , \quad (3.8)$$

$$Z|\mathbf{r}\rangle = z|\mathbf{r}\rangle . \quad (3.9)$$

Con estos resultados, comenzamos a calcular los elementos de matriz insertando el operador identidad en la expresión de los elementos de matriz de  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , lo cual ilustramos para el operador  $X$ , considerando que  $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}' | \mathbf{r} \rangle$

$$\langle E_f | X | E_i \rangle = \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \langle E_f | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | X | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | E_i \rangle = \int d^3\mathbf{r} \Psi_{n_f, l_f, m_f}^*(\mathbf{r}) x \Psi_{n_i, l_i, m_i}(\mathbf{r}) . \quad (3.10)$$

Las funciones de onda de los átomos hidrogenoides están dadas como

$$\Psi_{n, l, m}(\mathbf{r}) = R_{n, l}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) , \quad (3.11)$$

donde  $R_{n, l}(r)$  es una función que depende solamente de la parte radial y los  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  son los armónicos esféricos conocidos. Puesto que  $r$ ,  $\theta$  y  $\varphi$  son coordenadas esféricas, la relaciones de transformación con las coordenadas cartesianas vienen a ser

$$x = r \sen \theta \cos \varphi = r \sen \theta \left( \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) \quad (3.12)$$

$$y = r \sen \theta \sen \varphi = r \sen \theta \left( \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) \quad (3.13)$$

$$z = r \cos \theta . \quad (3.14)$$

El elemento de volumen en coordenadas esféricas se escribe como

$$d^3\mathbf{r} = r^2 \sen \theta dr d\theta d\varphi = r^2 dr d\Omega, \quad (3.15)$$

entonces, la Ec. (3.10) puede escribirse como

$$\langle E_f | X | E_i \rangle = \int_0^\infty r^2 dr R_{n_f, l_f}^*(r) r R_{n_i, l_i}(r) \quad (3.16)$$

$$\times \frac{1}{2} \int d\Omega Y_{l_f}^{*m_f}(\theta, \varphi) \sen \theta (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) Y_{l_i}^{m_i}(\theta, \varphi) . \quad (3.17)$$

Para evaluar esta integral es conveniente usar las siguientes propiedades (ver Arfken [25]):

$$\sen \theta e^{i\varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) = -a Y_{l+1}^{m+1}(\theta, \varphi) + b Y_{l-1}^{m+1}(\theta, \varphi) \quad (3.18)$$

$$\sen \theta e^{-i\varphi} Y_l^m(\theta, \varphi) = -c Y_{l+1}^{m-1}(\theta, \varphi) - d Y_{l-1}^{m-1}(\theta, \varphi) , \quad (3.19)$$

donde

$$a = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} , \quad b = \sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)(2l+1)}} , \quad (3.20)$$

$$c = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} , \quad d = \sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)}} . \quad (3.21)$$

Además, los armónicos esféricos obedecen la propiedad de ortonormalidad,

$$\int d\Omega Y_{l'}^{*m'}(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) = \delta_{mm'} \delta_{ll'} , \quad (3.22)$$

donde los  $\delta$  son los delta de Kronecker. Con estas propiedades, el resultado de la Ec. (3.16) se escribe como

$$\begin{aligned} \langle E_f | X | E_i \rangle = \frac{\chi}{2} & (-a\delta_{m_f, m_i+1}\delta_{l_f, l_i+1} + b\delta_{m_f, m_i+1}\delta_{l_f, l_i-1} \\ & + c\delta_{m_f, m_i-1}\delta_{l_f, l_i+1} - d\delta_{m_f, m_i-1}\delta_{l_f, l_i-1}) , \end{aligned} \quad (3.23)$$

en el que  $\chi$  denota el valor de la integral de la parte radial, es decir,

$$\chi = \int_0^\infty r^2 dr R_{n_f, l_f}^*(r) r R_{n_i, l_i}(r) . \quad (3.24)$$

En los átomos hidrogenoides las transiciones se dan entre dos valores diferentes de  $n$ , de modo que para tener elementos de matriz diferentes de cero,  $\chi$  debe ser diferente de cero y  $n_f \neq n_i$ . En la Ec. (3.23), los términos que corresponden a las transiciones  $\Delta m = +1$  están relacionados con las constantes  $a$  y  $b$ . Si el estado inicial es el fundamental ( $n_i = 1$ ,  $l_i = 0$  y  $m_i = 0$ ), entonces  $l_f = 1$ ,  $m_f = 1$  para algún  $n_f \neq 0$ , de modo que el resultado de (3.23) es

$$\langle E_f | X | E_i \rangle = -\frac{a\chi}{2} . \quad (3.25)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se determinan los elementos de matriz del operador  $Y$ , resultando para las mismas transiciones de la ecuación anterior

$$\langle E_f | Y | E_i \rangle = -\frac{a\chi}{2i} . \quad (3.26)$$

Para determinar  $\langle E_f | Z | E_i \rangle$  es necesario usar la identidad

$$\cos \theta Y_l^m = a' Y_{l+1}^m(\theta, \varphi) + b' Y_{l-1}^m(\theta, \varphi) , \quad (3.27)$$

donde

$$a' = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \quad \text{y} \quad b' = \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} , \quad (3.28)$$

obteniéndose

$$\langle E_f | Z | E_i \rangle = \chi(-a'\delta_{m_f, m_i}\delta_{l_f, l_i+1} + b'\delta_{m_f, m_i}\delta_{l_f, l_i-1}) . \quad (3.29)$$

Este último resultado indica que para transiciones donde debe verificarse que  $m_f = m_i + 1$ , el resultado es cero; es decir,

$$\langle E_f | Z | E_i \rangle = 0 \quad . \quad (3.30)$$

Con estos resultados y teniendo en cuenta las Ecs. (3.2) y (3.3), los elementos de matriz del momentum angular se expresa como

$$\begin{aligned} \langle E_f | \mathbf{p} | E_i \rangle &= im\omega_{fi} (\langle E_f | X | E_i \rangle \hat{\mathbf{e}}_x + \langle E_f | Y | E_i \rangle \hat{\mathbf{e}}_y) \\ &= p (\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y) \quad , \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde

$$p = \langle E_f | p_x | E_i \rangle = -iq \quad , \quad \text{siendo} \quad q = \frac{m\omega_{fi}a\chi}{2} \quad . \quad (3.32)$$

La representación matricial de  $\mathbf{p}$  en la base  $\{|E_1\rangle, |E_2\rangle\}$  se escribe como

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \langle E_f | \mathbf{p} | E_f \rangle & \langle E_f | \mathbf{p} | E_i \rangle \\ \langle E_i | \mathbf{p} | E_f \rangle & \langle E_i | \mathbf{p} | E_i \rangle \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Recordando que por ser impar el operador momentum lineal, sus elementos de matriz diagonales son iguales a cero, de modo que la matriz de  $\mathbf{p}$  para transiciones  $\Delta m = +1$  se puede escribir como

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & p(\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y) \\ p^*(\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Por la correspondencia entre los operadores de espín  $1/2$  y el sistema de dos niveles de energía,

$$S_+ \rightarrow |E_f\rangle\langle E_i| \quad \text{y} \quad S_- \rightarrow |E_i\rangle\langle E_f| \quad , \quad (3.35)$$

el operador  $S_+$  en la base  $\{|E_1\rangle, |E_2\rangle\}$  se escribe como

$$S_+ = \begin{pmatrix} \langle E_f | S_+ | E_f \rangle & \langle E_f | S_+ | E_i \rangle \\ \langle E_i | S_+ | E_f \rangle & \langle E_i | S_+ | E_i \rangle \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hbar\sigma_+ \quad , \quad (3.36)$$

y, de la misma manera, para  $S_-$  se tiene

$$S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hbar\sigma_- \quad , \quad (3.37)$$

donde  $\sigma_+$  y  $\sigma_-$  son las matrices de Pauli.

La matriz dada por la Ec. (3.34) se puede escribir como combinación lineal de las matrices de Pauli dados por las Ecs.(3.36) y (3.37), obteniéndose una expresión para la representación matricial del operador  $\mathbf{p}$  en la forma

$$\mathbf{p} = p(\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y)\sigma_+ + p^*(\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y)\sigma_- \quad . \quad (3.38)$$

De acuerdo a las definiciones de las polarizaciones circulares de derecha e izquierda dadas por la Ec.(3.1), el resultado anterior se puede escribir como

$$\mathbf{p} = \sqrt{2}(p\sigma_+\hat{\mathbf{e}}_- + p^*\sigma_-\hat{\mathbf{e}}_+) \quad . \quad (3.39)$$

### 3.2. Obtención de los hamiltonianos cuánticos para átomos hidrogenoides con polarización circular

El último resultado nos interesa para calcular el hamiltoniano de interacción dada por la Ec. (2.43), utilizando para ello la expresión del potencial vectorial dado por (2.25), en el cual consideramos solamente un único modo del campo electromagnético y las dos polarizaciones circulares independientes, el hamiltoniano de interacción se puede expresar como

$$H_I = \frac{e}{m}\mathbf{p} \cdot \sum_s \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}V}} (\hat{\mathbf{e}}_s a_s e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{e}}_s^* a_s^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \quad . \quad (3.40)$$

Utilizando la aproximación dipolar dada por la Ec. (2.47), la expresión del momentum lineal, Ec. (3.39) y teniendo en cuenta que el producto escalar de los vectores unitarios de polarización circular cumplen con las propiedades  $\hat{\mathbf{e}}_+ \cdot \hat{\mathbf{e}}_+^* = \hat{\mathbf{e}}_- \cdot \hat{\mathbf{e}}_-^* = 1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_+^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_- = \hat{\mathbf{e}}_+ \cdot \hat{\mathbf{e}}_-^* = 0$ , y que  $\hat{\mathbf{e}}_+^* = \hat{\mathbf{e}}_-$ , para transiciones  $\Delta m = +1$ , el hamiltoniano de interacción (3.40) se reescribe como

$$H_I^{(+)} = i\frac{\omega_{fi}a\chi}{\sqrt{2}}e\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}V}} \left[ (\sigma_- a_+^\dagger - \sigma_+ a_+) + (\sigma_- a_- - \sigma_+ a_-^\dagger) \right] \quad , \quad (3.41)$$

donde los dos primeros términos entre paréntesis dentro del corchete corresponden a los procesos donde se conserva energía y, los otros dos, los que no conservan energía, denotando el signo + en el superíndice de  $H$  la transición que corresponde

a  $\Delta m = +1$ . Por otro lado, el hamiltoniano del campo electromagnético,  $H_R$ , dada por la Ec. (2.29), aplicada a un único modo del campo electromagnético y las dos polarizaciones circulares, se puede escribir como

$$H_R = \hbar\omega_{\mathbf{k}}(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1/2) \quad . \quad (3.42)$$

Puesto que el hamiltoniano atómico sigue siendo la misma, Ec. (2.41), escribimos el hamiltoniano total del sistema para polarización circular derecha en la forma dada por (2.57), usando los resultados dados por las ecuaciones (3.39), (3.41) y (3.42), obteniendo

$$H^{(+)} = \hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\omega_{\mathbf{k}}(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) + iG^+ \left[ (\sigma_- a_+^\dagger - \sigma_+ a_+) + (\sigma_- a_- - \sigma_+ a_-^\dagger) \right] \quad , \quad (3.43)$$

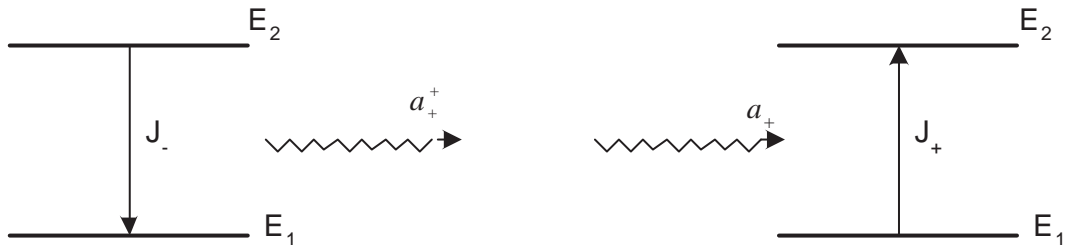
donde no se ha incluido el término  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2$  correspondiente al hamiltoniano del campo electromagnético,  $H_R$ , puesto que su efecto es solamente desplazar la energía de referencia sin modificar el espectro de energías. El parámetro  $G^+$  está dado por

$$G^+ = \frac{\omega_{fi} a \chi}{\sqrt{2}} e \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V}} \quad . \quad (3.44)$$

Cuando el sistema consta del campo electromagnético y  $N$  átomos independientes, en analogía a la Ec. (2.56), escribimos el hamiltoniano (3.43), en la forma

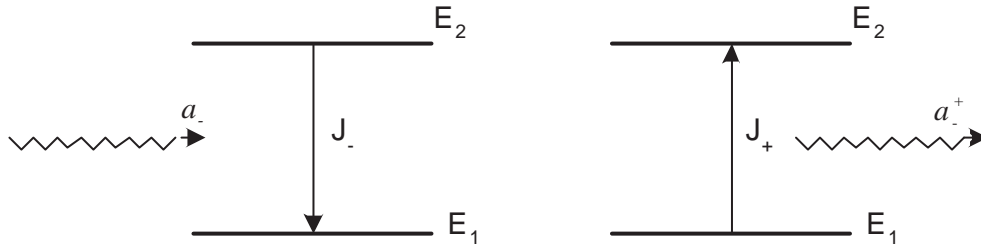
$$H^{(+)} = \omega_0 J_z + \hbar\omega_{\mathbf{k}}(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) + i\frac{G_1}{\sqrt{N}} (J_- a_+^\dagger - J_+ a_+) + i\frac{G_2}{\sqrt{N}} (J_- a_- - J_+ a_-^\dagger) \quad , \quad (3.45)$$

donde los parámetros  $G_1$  y  $G_2$  se han utilizado para separar los términos que conservan y no conservan energía, respectivamente.



**Figura 3.1:** Procesos donde se conserva energía,  $a_+^\dagger J_- - a_+ J_+$ .

Las figuras 3.1 y 3.2 esquematizan los procesos donde se conservan y no se conservan la energía, respectivamente, observando que en el primer caso se tienen solamente fotones con polarización circular positiva y, en el segundo, fotones con polarización circular negativa; es decir, en los términos donde no se conserva la energía se ven involucrados solamente fotones con polarización circular negativa, algo que se sugiere podría ser experimentalmente eliminado.



**Figura 3.2:** Procesos donde no se conserva energía:  $a_- J_- - a_+ J_+$ .

Para encontrar la expresión del hamiltoniano en el caso de transiciones  $\Delta m = -1$ , se observa en la Ec. (3.23) que, si la transición se produce entre el estado inicial excitado  $m_i = 1$  y el fundamental  $m_f = 0$ , el término diferente de cero corresponde al  $d$ , de modo que

$$\langle E_f | X | E_i \rangle = -\frac{\chi d}{2} . \quad (3.46)$$

De manera análoga, para la componente  $y$ , se obtendrá

$$\langle E_f | Y | E_i \rangle = \frac{\chi d}{2i} . \quad (3.47)$$

El valor  $\langle E_f | Z | E_i \rangle$  es siempre cero para polarización circular, de modo que, de acuerdo a las ecuaciones (3.2) y (3.3), se tiene

$$\langle E_f | \mathbf{p} | E_i \rangle = i \frac{m \omega_{fi}^{(-)} \chi d}{2} (\hat{\mathbf{e}}_x - i \hat{\mathbf{e}}_y) , \quad (3.48)$$

donde  $\omega_{fi}^{(-)}$  denota la frecuencia de transición de la polarización circular izquierda. Si la transición corresponde a la inversa del caso de polarización derecha, entonces debemos tener que  $\omega_{fi}^{(-)} = \omega_{fi}$ , en valor absoluto, siendo  $\omega_{fi}$  la frecuencia de transición de la polarización derecha. Lo que sigue, para llegar al hamiltoniano con polarización circular izquierda, es similar al procedimiento seguido para encontrar

el hamiltoniano con polarización circular derecha, obteniéndose para transiciones  $\Delta m = -1$

$$H^{(-)} = \omega_0 J_z + \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left( a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- \right) + i \frac{K_1}{\sqrt{N}} \left( J_+ a_- - J_- a_-^\dagger \right) + i \frac{K_2}{\sqrt{N}} \left( J_+ a_+^\dagger - J_- a_+ \right) , \quad (3.49)$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  están separando los términos que conservan y no conservan energía, respectivamente.

Si consideramos transiciones  $\Delta m = 0$ , éstas no corresponden a polarizaciones circulares. Para determinar el hamiltoniano correspondiente, partimos, otra vez, de la Ec. (3.23), en la que observamos que en ningún caso es posible encontrar los  $\delta_{m,m'} \delta_{l,l'}$  en el que se satisfaga  $m = m'$  y  $l = l'$ , resultando  $\langle E_f | X | E_i \rangle = 0$ . Lo mismo se encuentra para el operador  $Y$ , es decir,  $\langle E_f | Y | E_i \rangle = 0$ . Sin embargo, en el caso del operador  $Z$ , de acuerdo a la Ec. (3.28), se encuentra transiciones donde  $\Delta m = 0$ . Por ejemplo, para  $l_f = l_i + 1$  con  $l_i = 0$ , existen transiciones con  $m_i = m_f$ , obteniendo

$$\langle E_f | Z | E_i \rangle = \chi a' \quad \text{con} \quad \Delta m = 0 \quad . \quad (3.50)$$

Con este resultado, y tomando en cuenta la Ec. (3.2) y (3.3), se tiene que

$$\langle E_f | \mathbf{p} | E_i \rangle = i m \omega_{fi} \chi a' \hat{\mathbf{e}}_z = i p_z \hat{\mathbf{e}}_z \quad , \quad (3.51)$$

con

$$p_z = m \omega_{fi} \chi a' \quad . \quad (3.52)$$

Así, similar a los casos de polarización circular, obtenemos para el operador momentum lineal la expresión

$$\mathbf{p} = i p_z (\sigma_+ - \sigma_-) \hat{\mathbf{e}}_z \quad . \quad (3.53)$$

Este resultado hace ver claramente que en las transiciones  $\Delta m = 0$  no se da polarización circular, obteniéndose polarización plana en la dirección del eje  $z$ . Quiere decir, a su vez, que la dirección de propagación del campo electromagnético debe estar a lo largo del eje  $x$  o  $y$ . De este modo, de acuerdo a la Ec. (3.40), el hamiltoniano de interacción para un solo modo de propagación se puede escribir como

$$H_I^{(z)} = i g [(a \sigma_+ - a^\dagger \sigma_-) + (a^\dagger \sigma_+ - a \sigma_-)] \quad . \quad (3.54)$$

Así, para  $N$  átomos que no interactúan entre sí, el hamiltoniano del sistema será

$$H^{(z)} = \omega_0 J_z + \hbar \omega_{\mathbf{k}} (a^\dagger a) + i \frac{g_1}{\sqrt{N}} (J_+ a - J_- a^\dagger) + i \frac{g_2}{\sqrt{N}} (J_+ a^\dagger - J_- a) , \quad (3.55)$$



habiendo separado en el hamiltoniano de interacción, los términos que conservan energía con los que no conservan.

## Capítulo 4

# Estados coherentes generalizados y la obtención del hamiltoniano clásico

La importancia de dedicar el presente capítulo a las ideas básicas de los estados coherentes generalizados, se debe a que el procedimiento para determinar el hamiltoniano clásico a partir del cuántico se realiza a través de los denominados estados coherentes generalizados, que es un tema especializado cuya generalización se ha logrado recién en los últimos treinta años. Desde el nacimiento formal de la mecánica cuántica se ha considerado que la mecánica clásica es una aproximación de la mecánica cuántica, por ejemplo, la deducción de las leyes de Newton a partir de los valores medios cuánticos, expresado por el teorema de Ehrenfest [4].

En 1926, Schrödinger [15] propuso la posibilidad de encontrar estados cuánticos que simulen la dinámica clásica del oscilador armónico y tengan el mínimo de la relación de incertidumbre, denominándose estados cuasiclásicos. No fue hasta la década de los años sesenta del siglo XX que Glauber [14] (Premio Nobel de Física 2005) e independientemente Sudarshan [27], retomaron la idea de Schrödinger para la construcción de los autoestados del operador de aniquilación del oscilador armónico en conexión con la óptica cuántica, habiéndose acuñado el término estados coherentes del campo electromagnético. En la misma década de los sesenta, Klauder [28] desarrolló las ideas básicas de los estados coherentes utilizando grupos de Lie. En la siguiente década, Perelomov logró la generalización formal de los estados coherentes, donde se conecta íntimamente los estados coherentes con el grupo dinámico correspondiente para cada problema físico [16]. Una presentación pedagógica y sistematizada de los estados coherentes generalizados fue publicada por Zhang *et al* [26], el cual tomamos como referencia básica para presentar las ideas genéricas de los estados coherentes en este capítulo.

Desde el punto de vista conceptual e histórico, el límite clásico de la mecánica cuántica está relacionado con la mecánica semiclásica que viene a ser un esquema de cuantización a partir de órbitas en el espacio de fase de la mecánica clásica, cuyas ideas genéricas es el tema de la siguiente sección.

## 4.1. El límite clásico de la mecánica cuántica

La mecánica semiclásica trata de la conexión entre la mecánica clásica y mecánica cuántica cuando  $\hbar \rightarrow 0$ . El comportamiento clásico depende del hamiltoniano del sistema, analizando los procesos dinámicos se observan comportamientos regulares, denominados integrables, y dinámicas clásicas irregulares, llamadas caóticas.

En 1916, Wilson y Sommerfeld establecieron algunas reglas que permitían cuantizar sistemas donde las coordenadas en el espacio de fase son funciones periódicas del tiempo, que incluían la cuantización de la energía propuesta por Planck y del momento angular postulado por Bohr, conocidas en la literatura como condiciones de cuantización de Bohr-Sommerfeld, que puede encontrarse en textos básicos de Física Moderna [39]. En 1917, Einstein [29], mostró que dichas condiciones podrían ser generalizadas de una manera invariante e incluir sistemas donde el movimiento clásico sea no separable en las coordenadas, de modo que el movimiento clásico sea múltiplemente periódico. En 1926, Brillouin [30] explicó que las condiciones de Einstein eran una consecuencia del hecho de que las funciones de onda deben ser monovaluadas. Keller, en 1958 [31], mostró que las cáusticas en el movimiento clásico requieren una ligera modificación de las condiciones de Einstein y Brillouin.

La condición de cuantización dada por las propuestas de Einstein, Brillouin y Keller, conocida como la cuantización EBK, es válida para sistemas regulares. Dado un hamiltoniano clásico, es posible encontrar una transformación canónica en la que los momentos generalizados son constantes del movimiento. Condición que nos permite obtener un nuevo conjunto de coordenadas y momentos generalizados denominados variables angulares  $\theta_i$  y de acción  $I_i$ , respectivamente. Los subíndices indican valores desde de 1 hasta  $N$ , siendo  $2N$  la dimensión del espacio de fase. La cuantización EBK lleva al resultado

$$I_i = \left( n_j + \frac{\alpha_j}{4} \right) \hbar \quad , \quad (4.1)$$

en la que los  $\alpha_i$  son constantes denominadas índices de Maslov [32, 33], los cuales están relacionados con las cáusticas y, por ende con la topología de las trayectorias

de la partícula. Las variables de acción  $I_i$  se determinan de

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_i} p_j dq_j \quad . \quad (4.2)$$

El símbolo  $\gamma_i$  indica que la integral rodea el  $i$ -ésimo circuito irreducible del toro. Estas ecuaciones trabajan solamente cuando el sistema es completamente integrable, es decir, cuando se tienen  $N$  constantes del movimiento [36, 37].

En el caso de sistemas no integrables o caóticos se han desarrollado esquemas de cuantización semiclásicas a partir de Gutzwiller [34] y luego de Balian y Bloch [35], los cuales permiten determinar niveles de energía a partir de trayectorias clásicas. Estos temas son demasiado especializados y no es la intención abundar en detalles.

En esta sección se quiere señalar fundamentalmente que el límite clásico de la mecánica cuántica se consigue haciendo que  $\hbar \rightarrow 0$ , de modo que las incertidumbres en la posición y el momento lineal desaparezcan; además, los valores medios de los observables cuánticos correspondan justamente a los valores clásicos que tendrían los correspondientes operadores,

$$\langle AB \rangle = A_{\text{cl}} B_{\text{cl}} + O(\hbar). \quad (4.3)$$

Cuando los valores medios se determinan para estados coherentes se consiguen justamente las cantidades clásicas. Este procedimiento se bosqueja en este capítulo. Por otro lado, el límite  $\hbar \rightarrow 0$  nos lleva a la denominada mecánica semiclásica, mediante la cual es posible determinar los niveles de energía de estados ligados a partir de las trayectorias en el espacio de fase clásico.

## 4.2. Estados coherentes generalizados

Recordando que el sistema que estudiamos es la interacción de átomos de dos niveles de energía con la radiación cuantizada del campo electromagnético, en el presente trabajo utilizaremos dos tipos de estados coherentes, uno de ellos es el relacionado con el campo electromagnético denominado estados coherentes de campo, que no es otra cosa que los estados coherentes del oscilador armónico; el segundo son los estados coherentes atómicos, relacionados con las partículas de spin  $1/2$ . Como se dijo, las ideas genéricas del concepto de estados coherentes presentada en este capítulo están basadas en la monografía de Zhang *et al* [26], que consideramos está escrita pedagógicamente para principiantes, si bien previamente se hace necesario revisar conceptos de la teoría de grupos y de los grupos de Lie que pueden verse en libros como el de Gilmore [38].

La generalización del concepto de estados coherentes, originalmente planteado solamente para el campo electromagnético cuantizado, devino de la idea de Klauder [28] al usar la teoría de grupos en formalizar el concepto de los estados coherentes de campo. Se sabe que para cada sistema cuántico hay siempre una estructura de grupo bien definida; por lo tanto, se puede considerar que un sistema cuántico posee un grupo dinámico  $G$  con su álgebra de operadores autoadjuntos denotados por  $\mathfrak{g}$ . El hamiltoniano  $H$ , que representa la energía total del sistema, y los diferentes operadores de transición  $A_i$ , pueden ser expresados como funciones de un conjunto de operadores básicos  $T_i$  de  $\mathfrak{g}$ , tal que

$$H = H(T_i), \quad A = A(T_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (4.4)$$

donde los operadores  $T_i$  satisfacen relaciones de conmutación cerradas, es decir, expanden un álgebra de Lie en la forma

$$[T_i, T_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k T_k, \quad (4.5)$$

en la cual los  $C_{ij}^k$  son las constantes de estructura de  $\mathfrak{g}$ . También sabemos que el operador hamiltoniano actúa sobre un espacio de Hilbert que contiene una representación irreducible del grupo  $G$ . Además, se debe elegir un estado de referencia  $|\Phi_0\rangle$  en el espacio de Hilbert, el cual determinará la estructura del estado coherente y del espacio de fase del sistema dinámico.

Un subgrupo  $H$  de  $G$ , es el subgrupo de máxima estabilidad, que consiste de elementos  $h$  del grupo que llevan el estado de referencia invariante a menos de un factor de fase, lo cual se escribe como

$$h|\Phi_0\rangle = |\Phi_0\rangle e^{i\phi(h)}, \quad h \in H, \quad (4.6)$$

donde se sabe que el factor de fase no tiene importancia en cuanto a las predicciones físicas [4].

Para todo elemento  $g \in G$ , existe una descomposición única de  $g$  en un producto de dos elementos del grupo, uno en  $H$  y el otro en el grupo cociente  $G/H$ , tal que

$$g = \Omega h, \quad g \in G, \quad h \in H, \quad \Omega \in G/H. \quad (4.7)$$

En otras palabras, significa que para un estado dado  $|\Phi_0\rangle$ , se puede obtener un espacio coset<sup>1</sup> único. Como la acción de un elemento  $g$  arbitrario del grupo  $G$  sobre  $|\Phi_0\rangle$  está dada por

$$g|\Phi_0\rangle = \Omega h|\Phi_0\rangle = \Omega|\Phi\rangle e^{i\phi(h)}, \quad (4.8)$$

---

<sup>1</sup>Si  $G$  es un grupo,  $H$  un subgrupo de  $G$ , y  $g$  un elemento de  $G$ , entonces  $gH = \{gh : h \text{ es un elemento de } H\}$  es un *left coset* de  $H$  en  $G$ , y  $Hg = \{hg : h \text{ es un elemento de } H\}$  es un *right coset* de  $H$  en  $G$ .

que puede escribirse como

$$|\Lambda, \Omega\rangle = \Omega|\Phi_0\rangle, \quad (4.9)$$

cuya expresión viene a ser la definición general de grupo de los estados coherentes, garantizando que está en correspondencia uno a uno con el espacio coset  $G/H$  ( $\Omega \in G/H$ ) y que, por tanto, preserva todas las propiedades del espacio coset  $G/H$ . Este a su vez, se relaciona con un espacio de fase conectado con el espacio de fase de los sistemas hamiltonianos de la mecánica clásica.

### 4.3. Estados coherentes de campo

Sin perder de vista que los hamiltonianos obtenidos en el Capítulo 3, dados por las ecuaciones (3.45) y (3.49), representan nuestro sistema bajo estudio, las cuales contienen operadores de aniquilación y creación  $a$  y  $a^\dagger$ , respectivamente, se sabe que estos operadores conjuntamente con el operador número,  $\hat{N} = a^\dagger a$ , y el operador identidad,  $I$ , forman un álgebra que obedecen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{N}, a^\dagger] &= +a^\dagger, & [\hat{N}, I] &= 0, \\ [\hat{N}, a] &= -a, & [a^\dagger] &= 0, \\ [a, a^\dagger] &= +I, & [a, I] &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

de modo que el conjunto de operadores  $\{\hat{N}, a, a^\dagger, I\}$  forman un álgebra de Lie, denotado por  $h_4$  del correspondiente grupo de Lie  $H_4$ , denominado grupo de Heisenberg-Weyl. El espacio de Hilbert relacionado es llamado espacio de Fock, que no es otra cosa que los autovectores del operador número

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (4.11)$$

donde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . El operador número es un operador simultáneo con el operador hamiltoniano del oscilador armónico cuántico.

Por tanto, los autoestados  $|n\rangle$  son también autoestados del hamiltoniano del campo electromagnético en la forma

$$H_0|n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2)|n\rangle, \quad (4.12)$$

siendo el estado  $|0\rangle$  el autoestado fundamental o estado del vacío que corresponde al estado extremo. Ahora, el subgrupo de máxima estabilidad, el cual lleva el estado extremo invariante es un álgebra expandido por  $\{\hat{N}, I\}$  que corresponde al

subgrupo  $U(1) \otimes U(1)$  de  $H_4$ , siendo el coset  $H_4/U(1) \otimes U(1)$ , como el conjunto de elementos  $\Omega$  que proporcionan una única descomposición para cualquier elemento  $g \in H_4$ , tal que

$$g = Dh . \quad (4.13)$$

Un operador representativo típico en el espacio coset  $H_4/U(1) \otimes U(1)$  es justamente el operador desplazamiento definido como

$$D(z) = e^{za^\dagger - z^*a} , \quad (4.14)$$

con  $z$  un parámetro complejo arbitrario.

Los estados coherentes están definidos como las acciones de los elementos coset sobre el estado extremo, o sea,

$$|z\rangle = e^{(za^\dagger - z^*a)}|0\rangle , \quad (4.15)$$

siendo  $|z\rangle$  el estado coherente. Ya que  $z$  es un número complejo, existe una correspondencia uno a uno entre los estados coherentes  $|z\rangle$  y los puntos en el plano complejo, siendo una aplicación continua. De este modo,  $H_4/U(1) \otimes U(1)$  está relacionado con un espacio complejo y métrica explícita y, debido a que se busca una relación con el espacio de fase de la mecánica clásica, se demuestra que debe tener una estructura simpléctica [36]. Esto permite realizar una transformación del plano complejo  $z$  al espacio de fase real  $(q, p)$ , mediante las relaciones

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) \quad y \quad z^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip) . \quad (4.16)$$

Una de las propiedades más relevantes de estos estados coherentes es su no ortogonalidad expresada como

$$|\langle z|z'\rangle|^2 = e^{-|z-z'|^2} \quad (4.17)$$

y su sobrecompletitud, es decir, la representación del operador identidad en la base de los estados coherentes no es única. También se puede demostrar que los estados coherentes de campo son autoestados del operador de aniquilación

$$a|z\rangle = z|z\rangle . \quad (4.18)$$

Existen muchas otras propiedades que son relevantes especialmente en óptica cuántica las que para nuestros propósitos no son necesarias mencionarlas.

#### 4.4. Estados coherentes atómicos

En el caso de los estados coherentes relacionados con los átomos de dos niveles de energía, hay que tener en cuenta que hemos utilizado la correspondencia de los sistemas de dos niveles de energía con el espín  $1/2$ , tal que el sistema de átomos independientes es descrito por un sistema de espines  $1/2$  independientes, de modo que siempre es posible definir los operadores  $J_+$ ,  $J_-$  y  $J_z$  como

$$J_{\pm} = \sum_i S_{\pm}^i \quad \text{y} \quad J_z = \sum_i S_z^i . \quad (4.19)$$

Para estos operadores, el correspondiente grupo de Lie es el  $SU(2)$  con el álgebra

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad \text{y} \quad [J_+, J_-] = 2J_z . \quad (4.20)$$

El espacio de Hilbert del grupo  $SU(2)$  es el espacio estándar  $\{|j, m\rangle\}$  del momento angular, estudiado en cualquier curso de mecánica cuántica del pregrado [3], tal que se cumple

$$J^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle , \quad (4.21)$$

$$J_z|j, m\rangle = m\hbar|j, m\rangle , \quad (4.22)$$

$$J_{\pm}|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\hbar|j, \pm m\rangle , \quad (4.23)$$

donde  $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, \dots$  y  $m$  varía en una unidad desde  $m = -j$  hasta  $m = j$  para cada  $j$ . El subgrupo de máxima estabilidad es el grupo  $U(1)$  con el operador  $J_z$ , que lleva el estado  $|j, -j\rangle$  invariante. En realidad,  $|j, -j\rangle$  es el estado extremo, siendo el coset representativo  $SU(2)/U(1)$  con su operador desplazamiento dado por

$$\Omega(\xi) = e^{\xi J_+ - \xi^* J_-} . \quad (4.24)$$

De esta manera, el estado coherente respectivo se define como

$$|j, \xi\rangle = \Omega(\xi)|j, j\rangle . \quad (4.25)$$

La geometría de  $SU(2)/U(1)$  es una esfera bidimensional  $S^2$ , denominada esfera de Bloch [38], donde se satisface

$$\xi = \frac{\theta}{2}e^{i\phi} \quad \text{con} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi . \quad (4.26)$$

Definiendo

$$\tau = \tan \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \quad (4.27)$$



y

$$w = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau\tau^*}} , \quad (4.28)$$

se demuestra en la referencia [26] que la estructura simpléctica del espacio geométrico se construye bajo la transformación

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{4j}}(q + ip) \quad \text{y} \quad \tau^* = \frac{1}{\sqrt{4j}}(q - ip) , \quad (4.29)$$

donde  $(q, p)$  es el correspondiente espacio de fase clásico.

## 4.5. Obtención de los hamiltonianos clásicos con polarización circular del campo electromagnético

Uno de los rasgos notables de los estados coherentes es su permanencia como tal, es decir, si el sistema cuántico se encuentra en un estado coherente, permanecerá siempre en un estado coherente, de modo que la evolución temporal del paquete de onda se asemeja al de una partícula clásica. Por otro lado, se asume normalmente que el límite clásico de la teoría cuántica es el límite  $\hbar \rightarrow 0$ . De acuerdo a las relaciones de incertidumbre, el límite mencionado demanda que la incerteza de las coordenadas y momentos generalizados se hagan cero.

El valor esperado de un observable cuántico  $A$  (operador), es definido como

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle , \quad (4.30)$$

donde  $|\Psi\rangle$  es un estado cuántico cualquiera. En el caso de un estado cuántico que corresponde a un estado coherente, el valor esperado viene a ser su valor clásico. En otras palabras, si  $|\Lambda\rangle$  corresponde a un estado coherente, el valor medio para dicho estado viene a ser el correspondiente clásico

$$\langle A \rangle = \langle \Lambda | A | \Lambda \rangle = A_{\text{clásico}} . \quad (4.31)$$

Este resultado se utiliza para determinar los hamiltonianos clásicos a partir de los cuánticos, de modo que

$$H_{\text{clásico}} = \langle \Lambda | H | \Lambda \rangle . \quad (4.32)$$

Antes de realizar el cálculo de los hamiltonianos clásicos, es pertinente ver algunas propiedades que facilitan el procedimiento algebraico. El operador desplazamiento  $D(z)$  dado por la Ec. (4.14) puede escribirse como

$$D(z) = e^{-zz^*/2} e^{za^\dagger} e^{-z^*a} , \quad (4.33)$$

de modo que

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle = e^{-zz^*/2} e^{za^\dagger} (e^{-z^*a}|0\rangle) . \quad (4.34)$$

Desarrollando  $e^{-z^*a}$  y  $e^{za^\dagger}$  en serie de potencias y usando el hecho de que  $a|0\rangle = 0$ , la ecuación anterior (4.34) se reescribe como

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_n \frac{z^n (a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle . \quad (4.35)$$

Como

$$(a^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle , \quad (4.36)$$

la Ec. (4.35) se expresa como

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle . \quad (4.37)$$

Como los hamiltonianos cuánticos están expresados en términos de los operadores de aniquilación  $a$  y creación  $a^\dagger$ , es necesario determinar los valores medios de estos operadores. Luego usando (4.37) se tiene

$$\langle z|a|z\rangle = e^{-|z|^2} \sum_{n'} \frac{(z^*)^{n'}}{\sqrt{n'!}} \langle n'|a \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle . \quad (4.38)$$

Puesto que la acción de los operadores de creación y de aniquilación sobre los estados de Fock  $|n\rangle$ , son conocidos en textos de mecánica cuántica [4],

$$a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle , \quad (4.39)$$

el valor medio del operador de aniquilación para un estado coherente está dado como

$$\langle z|a|z\rangle = z . \quad (4.40)$$

De manera similar, se puede demostrar que el valor medio del operador de creación es

$$\langle z|a^\dagger|z\rangle = z^\dagger , \quad (4.41)$$

y verificar que

$$\langle z|a^\dagger a|z\rangle = zz^* . \quad (4.42)$$

Puesto que en nuestro caso estamos trabajando con las dos polarizaciones circulares independientes, se tendrá un estado coherente por cada tipo de polarización

circular, denotando como  $|z_+\rangle$  el estado coherente para polarización circular derecha y  $|z_-\rangle$  como el estado coherente para polarización circular izquierda, de modo que

$$\langle z_+|a_+|z_+\rangle = z_+ \quad , \quad \langle z_+|a_+^\dagger|z_+\rangle = z_+^* \quad , \quad (4.43)$$

y

$$\langle z_-|a_-|z_-\rangle = z_- \quad , \quad \langle z_-|a_-^\dagger|z_-\rangle = z_-^* \quad . \quad (4.44)$$

Queda claro que cada polarización está relacionado con su respectivo espacio de fase según

$$z_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 + ip_2) \quad , \quad z_+^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 - ip_2) \quad , \quad (4.45)$$

y

$$z_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_3 + ip_3) \quad , \quad z_-^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_3 - ip_3) \quad . \quad (4.46)$$

En el caso de los estados coherentes de momento angular  $|w\rangle$ , en la referencia [26] se demuestra que el estado coherente se puede escribir como

$$|w\rangle = \frac{1}{(1 + ww^*)^{-J}} e^{wJ_+} |J, -J\rangle \quad , \quad (4.47)$$

donde  $|J, -J\rangle$  es el estado mínimo del subespacio  $\{|J, m\rangle$  de la representación estándar del momentum angular. Utilizando las expresiones dadas por (4.28) y (4.29) y denotando el espacio de fase relacionado a los estados coherentes de momentum angular como  $(q_1, p_1)$ , se puede encontrar la relación entre  $w$  y el espacio de fase, obteniendo

$$w = \frac{q_1 + ip_1}{\sqrt{4J - (p_1^2 + q_1^2)}} \quad \text{y} \quad w^* = \frac{q_1 - ip_1}{\sqrt{4J - (p_1^2 + q_1^2)}} \quad . \quad (4.48)$$

Se puede demostrar que los valores medios de los operadores  $J_+$ ,  $J_-$  y  $J_z$  se pueden escribir como

$$\langle w|J_+|w\rangle = \frac{2Jw^*}{1 + ww^*} \quad , \quad \langle w|J_-|w\rangle = \frac{2Jw}{1 + ww^*} \quad , \quad (4.49)$$

y

$$\langle w|J_z|w\rangle = -J \left( \frac{1 - ww^*}{1 + ww^*} \right) \quad . \quad (4.50)$$

Para los hamiltonianos con polarización circular encontrados en el Capítulo 3 (transiciones  $\Delta m = \pm 1$ ), queda claro que los estados coherentes del sistema se pueden escribir como el producto  $\otimes$  de cada tipo de estado coherente

$$|\Lambda\rangle = |w\rangle \otimes |z_+\rangle \otimes |z_-\rangle = |w, z_+, z_-\rangle \quad , \quad (4.51)$$

de modo que el hamiltoniano clásico se escribe como

$$H_{\text{clas}} = \langle z_-, z_+, w | H | w, z_+, z_- \rangle , \quad (4.52)$$

siendo  $H$  el operador hamiltoniano cuántico.

De acuerdo a la notación usada en el Capítulo 3 y utilizando los resultados anteriores, el hamiltoniano para polarización circular derecha se puede escribir como

$$H_{\text{clas}}^{(+)} = \langle z_-, z_+, w | H^{(+)} | w, z_+, z_- \rangle . \quad (4.53)$$

Las dos frecuencias deben ser iguales cuando se producen las transiciones entre los dos niveles de energía. Así, reemplazando la expresión de  $H^{(+)}$ , Ec. (3.45), en (4.53), se tiene

$$\begin{aligned} H_{\text{clas}}^{(+)} = & \hbar\omega_0 \langle w | J_z | w \rangle + \hbar\omega_k \left( \langle z_+ | a_+^\dagger a_+ | z_+ \rangle + \langle z_- | a_-^\dagger a_- | z_- \rangle \right) \\ & + i \frac{G_1}{\sqrt{N}} \left( \langle w | J_- | w \rangle \langle z_+ | a_+^\dagger | z_+ \rangle - \langle w | J_+ | w \rangle \langle z_+ | a_+ | z_+ \rangle \right) \\ & + i \frac{G_2}{\sqrt{N}} \left( \langle w | J_- | w \rangle \langle z_- | a_- | z_- \rangle - \langle w | J_+ | w \rangle \langle z_- | a_-^\dagger | z_- \rangle \right) . \end{aligned} \quad (4.54)$$

Los valores medios de los operadores de la anterior expresión se escriben en términos de sus respectivas variables del espacio de fase, para lo cual se utilizan los valores medios obtenidos anteriormente, ecuaciones (4.40), (4.41), (4.42), (4.43) y (4.44), obteniendo los siguientes resultados:

$$\langle w | J_z | w \rangle = -J + \frac{1}{2} (q_1^2 + p_1^2) , \quad (4.55)$$

$$\langle w | J_\pm | w \rangle = \frac{1}{2} (q_1 \mp ip_1) \sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)} , \quad (4.56)$$

$$\langle z_+ | a_+^\dagger a_+ | z_+ \rangle = \frac{1}{2} (q_2^2 + p_2^2) , \quad (4.57)$$

$$\langle z_- | a_-^\dagger a_- | z_- \rangle = \frac{1}{2} (q_3^2 + p_3^2) , \quad (4.58)$$

$$\langle z_+ | a_+ | z_+ \rangle = z_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_2 + ip_2) , \quad (4.59)$$

$$\langle z_+ | a_+^\dagger | z_+ \rangle = z_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_2 - ip_2) , \quad (4.60)$$

$$\langle z_- | a_- | z_- \rangle = z_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_3 + ip_3) , \quad (4.61)$$

$$\langle z_- | a_-^\dagger | z_- \rangle = z_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_3 - ip_3) . \quad (4.62)$$

Estas expresiones se reemplazan en (4.54) y, después de las manipulaciones algebraicas correspondientes, el hamiltoniano clásico con polarización circular derecha resulta

$$H_{\text{cl}}^{(+)} = -\hbar\omega_0 J + \hbar\frac{\omega_0}{2} (q_1^2 + p_1^2) + \hbar\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} (q_2^2 + p_2^2 + q_3^2 + p_3^2) \\ + \frac{\sqrt{4J - (p_1^2 + q_1^2)}}{\sqrt{4J}} [G_1 (q_1 p_2 - q_2 p_1) - G_2 (q_1 p_3 + q_3 p_1)] . \quad (4.63)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se determina el hamiltoniano clásica que corresponde a la polarización circular izquierda, cuyo resultado es

$$H_{\text{cl}}^{(-)} = -\hbar\omega_0 J + \hbar\frac{\omega_0}{2} (q_1^2 + p_1^2) + \hbar\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} (q_2^2 + p_2^2 + q_3^2 + p_3^2) \\ + \frac{\sqrt{4J - (p_1^2 + q_1^2)}}{\sqrt{4J}} [K_1 (q_2 p_1 - q_1 p_2) + K_2 (q_1 p_3 + q_3 p_1)] . \quad (4.64)$$

Del mismo modo, para el hamiltoniano que corresponde a transiciones  $\Delta m = 0$ , se obtiene

$$H_{\text{cl}}^{(z)} = -\hbar\omega_0 J + \hbar\frac{\omega_0}{2} (q_1^2 + p_1^2) + \hbar\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} (q_2^2 + p_2^2) \\ + \frac{\sqrt{4J - (p_1^2 + q_1^2)}}{\sqrt{4J}} [g_+ q_2 p_1 + g_- q_1 p_2] . \quad (4.65)$$

Como  $\Delta m = 0$  corresponde a transiciones con polarización plana, la última ecuación muestra el hamiltoniano clásico con dos grados de libertad, muy semejante al obtenido en la Ec.(2.57) del Capítulo 2.

# Capítulo 5

## Discusión

En el nivel del presente trabajo no se pretende realizar un estudio detallado de los resultados obtenidos en los capítulos 3 y 4, especialmente en lo que concierne a los comportamientos caóticos. Como se ha mencionado en el caso de polarización plana, entre las décadas de los años 80 y 90 del siglo pasado, los grupos brasileños han realizado numerosas investigaciones relacionadas con caos, tanto del hamiltoniano cuántico como clásico.

En este capítulo solamente haremos una descripción de los resultados obtenidos en relación a las dificultades teóricas y técnicas que pueden encontrarse para realizar estudios detallados de los hamiltonianos clásicos y cuánticos en cuanto a sus manifestaciones caóticas con polarización circular, lo cual puede justificar varias publicaciones por ser resultados nuevos.

Sin embargo, es oportuno también comentar que lo obtenido en este trabajo puede ser utilizado como modelos en óptica cuántica y realizar cálculos similares a los obtenidos con polarización plana, algo que podría ser muy interesante explorar.

### 5.1. Hamiltonianos cuánticos

En términos generales, para cualquier estudio de la dinámica de un sistema cuántico, lo primero es conocer los niveles de energía y sus correspondientes auto-estados, llevándonos al problema de la diagonalización de la matriz que representa el hamiltoniano. En los hamiltonianos obtenidos con polarización circular, debido a que los dos sentidos de dicha polarización son independientes, se plantea el problema de resolver en un espacio de Hilbert que es el producto  $\otimes$  del espacio de

Fock relacionado a la polarización derecha, el otro espacio de Fock relacionado a la polarización izquierda, al que se incluye el espacio del momento angular de espín relacionado con los átomos. Los dos espacios de Fock tienen que ver con los dos sentidos de polarización del campo electromagnético cuantizado. Como el espacio de Fock es infinito numerable y la del espín finito, se tendrá la dificultad de diagonalizar una matriz infinita. Para obtener numéricamente la diagonalización de la matriz debe acotarse la matriz, aquí necesariamente existe un trabajo bastante largo observando el espectro de autovalores y dando las respectivas acotaciones, hasta obtener uno que permita la convergencia requerida para las condiciones dadas.

Para el caso de polarización plana, donde el espacio de Hilbert es solamente el producto  $\otimes$  de un espacio de Fock y el de espín, conocemos que no es posible una diagonalización analítica, excepto en la aproximación de onda rotante o casos aproximados muy especiales [8], por lo que hay que recurrir a métodos numéricos.

La obtención de los autovalores de energía de los hamiltonianos con polarización circular es un trabajo en desarrollo. Nos permitirá realizar estudios como la estadística de niveles de energía, para realizar pruebas del comportamiento caótico. Crisp [24] ha conjeturado que eliminando una de las polarizaciones circulares podría eliminarse caos, algo que es relativamente fácil verificar, como comentaremos en la siguiente sección para el caso clásico. Esto significaría que eliminando la polarización circular izquierda o derecha de, por ejemplo, la Ec. (3.45), a la que se elimina la polarización izquierda, queda como

$$H^{(+)} = \hbar\omega_0 J_z + \hbar\omega_{\mathbf{k}}(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) + i \frac{G_1}{\sqrt{N}} (J_- a_+^\dagger - J_+ a_+), \quad (5.1)$$

de la cual sería posible obtener los niveles de energía de manera analítica y verificar el comportamiento regular a través de la estadística de niveles.

Ya que el modelo de Dicke con polarización plana ha conducido a modelos consagrados en óptica cuántica, como el modelo de Jaynes-Cummings [5], es posible plantearse también realizar cálculos en dicha dirección, ya que finalmente pueden conducir a realizar pruebas experimentales con los desarrollos que hoy se conocen en óptica cuántica experimental, planteándose eliminar experimentalmente una de las polarizaciones circulares. Posibles verificaciones que pueden hacerse en el marco del modelo de Jaynes-Cummings son las oscilaciones de Rabi, colapsos y revivales.

## 5.2. Hamiltonianos clásicos

En los últimos cuarenta años la mecánica clásica se ha revitalizado con el descubrimiento de caos. Esencialmente se ha constatado que en la mayoría de las situaciones, a pesar de que las ecuaciones de Hamilton son determinísticas, se encuentra impredecibilidad cuando el tiempo se hace grande. Esto ha llevado a cierta reformulación de la mecánica clásica en términos de los sistemas dinámicos, especialmente en lo concerniente a las ecuaciones canónicas de Hamilton, denominada en ese contexto como sistemas hamiltonianos, cuando ya se creía una teoría acabada, como puede verse en textos de mecánica clásica de los últimos años, por ejemplo la tercera edición del consagrado texto de Goldstein [36].

Los hamiltonianos clásicos obtenidos con polarización circular son de tres grados de libertad. Nuestro interés intrínseco es verificar el comportamiento caótico de dichos resultados. Habitualmente se realizan mapas de Poincaré que grafican de manera cualitativa el comportamiento regular o caótico de los hamiltonianos. Dichos mapas consisten en proyectar la dinámica sobre superficies que podamos observar en dos dimensiones. Cuando se trata de sistemas hamiltonianos conservativos, como es nuestro caso, la dinámica se puede reducir a una dimensión, y en el caso de dos grados de libertad es posible proyectar a un plano de dos dimensiones. En nuestro caso, de tres grados de libertad, no se puede dar esa posibilidad, por lo que se descarta el uso de mapas de Poincaré.

Otro de los métodos utilizados para verificar comportamientos caóticos es la determinación de los exponentes de Lyapunov [40, 41], lo cual si permitiría realizar la prueba correspondiente. Sin embargo, en este caso, el esfuerzo numérico es muy grande pero realizable. Utilizando las ecuaciones de Hamilton para el hamiltoniano (4.63) se obtiene un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales,

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} = & \hbar\omega_0 p_1 - \frac{p_1}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} [G_1 (q_1 p_2 - q_2 p_1) - G_2 (q_1 p_3 - q_3 p_1)] \\ & + \frac{\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}}{4J} (G_1 q_2 - G_2 q_3). \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} = & -\hbar\omega_0 q_1 + \frac{q_1}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} [G_1 (q_1 p_2 - q_2 p_1) - G_2 (q_1 p_3 - q_3 p_1)] \\ & - \frac{\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}}{4J} (G_1 p_2 - G_2 p_3). \end{aligned} \quad (5.3)$$



$$\frac{dq_2}{dt} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}p_2 + \frac{\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}}{\sqrt{4J}}G_1q_1, \quad (5.4)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\hbar\omega_{\mathbf{k}}q_2 + \frac{\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}}{\sqrt{4J}}G_1p_1, \quad (5.5)$$

$$\frac{dq_3}{dt} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}p_3 - \frac{\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}}{\sqrt{4J}}G_2q_1, \quad (5.6)$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\hbar\omega_{\mathbf{k}}q_3 + \frac{\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}}{\sqrt{4J}}G_2p_1. \quad (5.7)$$

Para determinar los exponentes de Lyapunov hay que resolver 36 ecuaciones diferenciales ordinarias adicionales relacionadas con la linealización del sistema de ecuaciones anterior fijando una condición inicial para cada variable del espacio de fase, que representa un vector de seis dimensiones. Una reciente revisión de los exponentes de Lyapunov se puede encontrar en la publicación de Hartl [42]. No obstante, en los últimos años se ha propuesto caracterizar caos en sistemas hamiltonianos conservativos de hasta tres grados de libertad, como es nuestro caso, utilizando el índice de alineamiento más pequeño, llamado método SALI [43].

Si eliminamos una de las polarizaciones circulares del hamiltoniano (4.63), por ejemplo la relacionada con la polarización circular izquierda, se tendría que hacer cero la variable  $q_3$  y  $p_3$ , quedando

$$\begin{aligned} H_{\text{cl}}^{(+)} = & -\hbar\omega_0 J + \hbar\frac{\omega_0}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \hbar\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}(q_2^2 + p_2^2 + q_3^2 + p_3^2) \\ & + \frac{\sqrt{4J - (p_1^2 + q_1^2)}}{\sqrt{4J}}[G_1(q_1p_2 - q_2p_1)]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Puede verificarse sin mucha dificultad que este hamiltoniano nos dará un comportamiento regular, puesto que si intentamos proyectar la dinámica al plano  $q_1p_1$ , por ejemplo, en la cual se hace  $q_1 = 0$  y  $p_1 = 0$ , se llega a un hamiltoniano del tipo

$$H = -\hbar\omega_0 J + \hbar\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}(q_2^2 + p_2^2), \quad (5.9)$$

la cual nos asegura que el mapeo en dicho plano serán trayectorias regulares.

## Capítulo 6

### Conclusiones

Se han obtenido los hamiltonianos cuánticos y clásicos del sistema espín-bosón cuando el campo electromagnético es circularmente polarizado, lo cual ocurre para transiciones  $\Delta m = \pm 1$  en átomos hidrogenoides, y polarización plana para transiciones  $\Delta m = 0$  en el mismo tipo de átomos.

Los parámetros del sistema,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $K_1$  y  $K_2$ , para polarización circular, y  $g, g'$  para polarización plana, dependen del valor de la integral radial del átomo relacionado a los niveles de energía donde se producen las transiciones.

Para explorar cuánticamente los regímenes caóticos, que dependen de los valores de los parámetros señalados arriba, se hace necesario determinar los niveles de energía del sistema para el estudio estadístico de niveles de energía, lo cual es una tarea planteada a futuro por las dificultades teóricas y prácticas.

El estudio de los correspondientes hamiltonianos clásicos es también una tarea a futuro, que permite encontrar los regímenes caóticos en el marco de la teoría de los sistemas dinámicos y las familias de órbitas periódicas.

Adicionalmente, se sugiere que las hamiltonianos cuánticos obtenidas con polarización circular, pueden utilizarse para realizar una serie de cálculos relacionados con óptica cuántica y que hoy podrían ser verificados experimentalmente.

# Bibliografía

- [1] R.H. Dicke; *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
- [2] E.T. Jaynes, F.W. Cummings; *Proc. IEEE* **51**, 89-109 (1963).
- [3] R.P. Feynman, F.L. Vernon JR, R.W. Hellwarth; *J. Appl. Phys.* **27**, 554 (1959).
- [4] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë; *Quantum Mechanics, Vol I.*, John-Wiley & Sons, New York (1971).
- [5] B.W. Shore, P.I. Night; *J. Modern Optics* **40**, 1195 (1993).
- [6] P.I. Belogrov, G.M. Zaslavskii, G.K. Tartakovskii; *Phys. JETP* **44**, 945 (1976).
- [7] P. Milonni, M.L. Shim, J.R. Ackerhalt; *World- Scientific Lecture Notes in Physics*, Vol. **6**. *Chaos in Laser-Matter Interactions*, World Scientific, Singapore (1987).
- [8] R. Graham, M. Hohnerbach; *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1378 (1986); *Z. Phys.* **B 57**, 233 (1984).
- [9] J.N. Maki, M.C. Nemes, M.P. Pato; *Optical Communications* **72**, 113 (1989).
- [10] C.H. Lewenkopf, M.C. Nemes, V. Marvulle, V., M.P. Pato, D. Wreszinski; *Phys. Letters A* **155**, 113 (1991).
- [11] M.A.M. de Aguiar, K. Furuya, M.C. Nemes; *Quantum Optics* **3**, 305 (1991).
- [12] M.A.M. de Aguiar, F. Furuya, C.H. Lewenkopf, M.C. Nemes; *Ann. Phys. N. Y.* **216**, 291 (1992).
- [13] K. Furuya, M.A.M. de Aguiar, C.H. Lewenkopf, M.C. Nemes; *M. C.; Ann. Phys. N. Y.* **216**, 313 (1992).
- [14] R.J. Glauber; *Phys. Rev. Lett.* **10**, 84 (1963).

- [15] E. Schrödinger; *Naturwissenschaften* **14**, 664 (1926).
- [16] A.M. Perelemov; *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer Verlag, Berlin (1986).
- [17] D.F. Walls, G.J. Milburn; *Quantum Optics*, Springer Verlag, Berlin (1995).
- [18] R. Loudon; *The Quantum Theory of Light, Sec. Edit.*, Clarendon Press-Oxford, London (1983).
- [19] J.J. Sakurai; *Modern Quantum Mechanics*, Adisson-Wesley, New York (1982).
- [20] J.S. Tomwsend; *A Modern Approach to Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1992).
- [21] C. Cohen Tannoudji, J. Dupont Roc, G. Gryaberg; *Photons and Atoms, Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley, New York (1998).
- [22] J.D. Jackson; *Electrodinâmica Clássica, Seg. Ed.*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro (1983).
- [23] W.H. Louisell; *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Wiley, New York, (1973).
- [24] M.D. Crisp; *Phys. Rev. A* **43**, 2430 (1991).
- [25] M.D. Arfken; *Mathematical Physics*, Addison Wiley and Sons, New York (1985).
- [26] W.M. Zhang, D.H. Feng, R. Gilmore; *Coherent States: Theory and some Applications*, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 867 (1990).
- [27] E.C.G. Sudarshan; *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277 (1963).
- [28] J.R. Klauder; *J. Math. Phys.* **4**, 1055 (Part I); 1058 (Part II) (1963).
- [29] A. Einstein; *Verhand. Deut. Phys. Ges.* **19**, 82 (1917).
- [30] M.L. Brillouin; *J. de Physique* **7**, 353 (1926).
- [31] J.B. Keller; *Ann. Phys. N.Y.* **4**, 180 (1958).
- [32] A.M. Ozorio de Almeida; *Hamiltonian Systems, Chaos and Quantization*, Cambridge University Press, London (1988).
- [33] I.C. Percival; *Adv. Chem. Phys* **36**, 1 (1977).

- [34] M.C. Gutzwiller; *J. Math. Phys.* **8**, 1979, (1967); *J. Math. Phys.* **10**, 1004, (1969); *J. Math. Phys.* **11**, 1791, (1970); *J. Math. Phys.* **12**, 341 (1971).
- [35] R. Balian, C. Bloch; *Ann. Phys. N.Y.* **85**, 514 (1974).
- [36] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko; *Classical Mechanics*, Third Edition, Addison Wesley, New York (2001).
- [37] M.A. Lieberman, A.J. Lichtenberg; *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer Verlag, Berlin (1992).
- [38] R. Gilmore; *Lie Groups, Lie Algebras, and some their Applications*, John Wiley and Sons, New York (1974).
- [39] R. Eisberg and R. Resnick; *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, John Wiley and Sons, New York (1974).
- [40] E.A. Jackson; *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Vol. 2, Cambridge University Press, London (1991).
- [41] S. Wiggins; *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer Verlag, Berlin (1990).
- [42] M.D. Hartl; [xxx.arxiv.org](http://xxx.arxiv.org), ArXiv:physics/0303077 (2003).
- [43] Ch. Skokos, Ch. Antonopoulos, T.C. Bountis, M.N. Vrahatis; *Proceedings of the Conference Libration Point Orbits and Applications*, Eds. G. Gómez, M.W. Lo, J.J. Masdemont: World Scientific, 653, Singaopre (2003).